DST n°1

Mathématiques - 28 Septembre 2024 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 2 exercices et 1 problème tous indépendants.

Rappels et notations

On rappelle les notations et résultats suivants qui pourront être utilisé sans démonstration :

Produit :

- Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels, on note $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$ le produit des termes de rang 1 à n de cette suite.

Croissances comparées :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Variables aléatoires :

- Si X compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité de succès $p \in]0;1[$, alors X suit la **loi binomiale de paramètres (n,p)**. L'ensemble des valeurs prises par X est $\{0, 1, \ldots, n\}$ et la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

  où $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, avec $\displaystyle\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

- Si X suit la loi binomiale de paramètres (n,p), alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
- Si X est une variable aléatoire qui admet une espérance et que a et b sont deux réels, alors $E(aX + b) = aE(X) + b$ (linéarité de l'espérance).

Puissances réelles :

- Si x est un réel strictement positif et y est un réel, alors :

$$x^y = \mathrm{e}^{y\ln(x)}$$

- Si x est un réel strictement positif et n est un entier naturel, alors il existe un unique réel y tel que $y^n = x$. On note $y = \sqrt[n]{x}$ et on a alors :

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Partie entière :

- Si x est un nombre réel, il existe un unique entier relatif n tel que

$$n \leq x < n + 1$$

  n s'appelle alors la **partie entière de x** et on note $\lfloor x \rfloor = n$

Nombre d'Euler e **:**

- On a $\mathrm{e} \simeq 2,7183$. L'encadrement $2 < \mathrm{e} < 3$ suffit dans le problème.

Exercice 1

Soit $a \in]0;\pi[$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)$.

Exercice 2

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) \quad : \quad 2\cos(2x) + 2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cos(x) + 2 - \sqrt{6} = 0$$

1. Montrer que cette équation est équivalente à

$$(E') \quad : \quad 4\cos^2(x) + 2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cos(x) - \sqrt{6} = 0$$

2. Montrer que $\sqrt{20+8\sqrt{6}} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Problème - Étude d'un test par regroupement

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de test de prélèvement sanguins dite du *poolage* ; elle est présentée dans la partie II, où on l'étudie d'un point de vue probabiliste. Dans tout le problème, a désigne un nombre réel strictement positif. Dans la partie I, on étudie, à titre préliminaire, la fonction f_a définie sur $]0;+\infty[$ par la relation :

$$f_a(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{e}^{-ax}$$

Partie I : Étude de f_a

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par la relation :

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

   On considère l'équation $(E_a)\ :\ g(x) = a$ (où l'inconnue x appartient à $]0;+\infty[$).

   (a) Étudier les variations de la fonction g. (On dressera le tableau de variation et on tracera la représentation graphique de g.)

   (b) On suppose que : $0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   Montre que (E_a) admet exactement deux solutions. On les note $u(a)$ et $v(a)$, en convenant que $u(a) < v(a)$. Établir en outre que $1 < u(a) < \mathrm{e} < v(a)$.

   (c) Discuter suivant les valeurs de a, et sans justifier, le nombre de solutions de (E_a).

2. Soit h_a la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par la relation :

$$h_a(x) = 2\ln x + \ln a - ax$$

   On considère l'équation $(F_a)\ :\ h_a(x) = 0$ (où l'inconnue x appartient à $]0;+\infty[$.

(a) Étudier les variations de la fonction h_a. (On ne demande pas la représentation graphique de h_a).

(b) On suppose que $0 < a < \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.
Montrer que (F_a) admet exactement deux solutions. On les note $r(a)$ et $s(a)$, en convenant que $r(a) < s(a)$. Établir en outre que $0 < r(a) < \dfrac{2}{a} < s(a)$.

(c) Discuter suivant les valeurs de a, et sans justifier, le nombre de solutions de (F_a)

3. Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b$ et x appartenant à $]0; +\infty[$. Montrer que :

$$\frac{1}{x} - 1 < f_a(x) < f_b(x) < \frac{1}{x}$$

4. *Comportement asymptotique de f_a*

(a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f_a(x)$.

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$.

5. *Signe de f_a*

(a) Comparer les signes de $f_a(x)$ et de $a - g(x)$.

(b) En déduire le tableau de signes de $f_a(x)$ lorsque x décrit $]0; +\infty[$, a étant fixé. **(On sera amené à distinguer trois cas suivant la position de a par rapport à $\frac{1}{\mathrm{e}}$.)**

6. *Variations de f_a*

(a) Comparer les signes de $f_a'(x)$ et de $h_a(x)$.

(b) Dresser le tableau de variation de f_a. On distinguera deux cas :

$$a \geq \frac{4}{\mathrm{e}^2} \quad \text{et} \quad 0 < a < \frac{4}{\mathrm{e}^2}$$

Dans ce dernier cas, on ne cherchera pas à préciser les valeurs de $f_a(r(a))$ et de $f_a(s(a))$

7. On suppose dans cette question que $0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(a) Établir que $u(a) < r(a) < v(a) < s(a)$ et que f_a présente un minimum en $r(a)$.

(b) Donner l'allure du graphe de f_a.

8. On suppose encore que $0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, et on pose $m(a) = f_a(r(a))$.

(a) Établir que : $r(a) = \dfrac{\mathrm{e}^{ar(a)/2}}{\sqrt{a}}$.

(b) Déterminer $\lim\limits_{a \to 0} \sqrt{a}\, r(a)$.
On pourra écrire : $ar(a) = \sqrt{a}\, \mathrm{e}^{ar(a)/2}$. On utilisera alors la question 2.b) pour obtenir la limite de $ar(a)$ lorsque a tend vers 0.

(c) Déterminer $\lim\limits_{a \to 0} m(a)$.

Partie II : Étude du *poolage*

On étudie dans cette partie une méthode de détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble donné de N individus tirés au sort de façon indépendantes dans une population très vaste par rapport à N. La proportion de porteurs du parasite dans la population est p $(0 < p < 1)$.

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat de ce test étant dit positif dans le premier cas et négatif dans le second.

Pour chacun des N individus, on possède un prélèvement sanguin. On envisage alors deux méthodes de détection.

Première méthode : on teste un à un les N prélèvements, effectuant ainsi N tests.

Seconde méthode (poolage) : on fixe un entier naturel non nul ℓ. On suppose que N est un multiple de ℓ et on pose $N = n\ell$. On répartit les N prélèvements en n groupes G_1, G_2,..., G_n, chaque groupe G_i contenant ℓ prélèvements. Pour chacun des groupes G_i, on extrait une quantité de sang de chacun des ℓ prélèvements qu'il contient, puis on mélange ces extraits, obtenant ainsi un échantillon de sang H_i, caractéristique du groupe G_i.

On teste alors H_i :

- si le test de H_i est négatif, aucun des individus au sein du groupe G_i n'est porteur du parasite. Le travail sur le groupe H_i est alors terminé.

- si le test de H_i est positif, on teste un à un les prélèvements de G_i pour détecter les porteurs du parasite au sein du groupe G_i.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i a été positif, et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans la réalisation de la méthode de poolage.

9. (a) Exprimer T à l'aide de n, ℓ et X.

   (b) Pour tout nombre entier naturel i compris entre 1 et n, calculer la probabilité de l'événement « le test de H_i est négatif »

   (c) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X

   On pose désormais et pour toute la fin du problème : $\boldsymbol{a = -\ln(1-p)}$.

   (d) Montrer que $E(T) = N(1 + f_a(\ell))$.

   On suppose en outre dans toute la suite du problème que : $\boldsymbol{0 < p < 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}}$.

10. Montrer que $f_a(3) < 0$. Comparer les deux méthodes pour $\ell = 3$.

11. Montrer que $a < \dfrac{\ln(3)}{3}$.

    On admet dans la suite du problème que : $\boldsymbol{a < \dfrac{1}{e}}$.

On cherche maintenant à optimiser la méthode du poolage, c'est à dire choisir, en fonction de p, la valeur de ℓ qui minimise $E(T)$.

12. Soit ℓ un nombre entier naturel non nul. on dit que ℓ vérifie la propriété (MIN) si, pour tout nombre entier naturel non nul ℓ', $f_a(\ell) \leq f_a(\ell')$.

    (a) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel non nul ℓ qui vérifie la propriété (MIN) et qu'un tel entier est égal soit à $\lfloor r(a) \rfloor$, soit à $\lfloor r(a) \rfloor + 1$ où $\lfloor r(a) \rfloor$ désigne la partie entière de $r(a)$.

    On note désormais ℓ_0 le plus petit des entiers naturels non nuls ℓ qui vérifient la propriété (MIN).

    (b) Montrer que $f_a(\ell_0) < 0$. En déduire que $\ell_0 \geq 2$.

    (c) Montrer que $f_a(3) < f_a(2)$. Que peut-on en déduire pour ℓ_0 ?
    Indication : étudier la fonction $\varphi : a \mapsto f_a(3) - f_a(2)$ définie sur $\left]0; \frac{\ln(3)}{3}\right[$